Teorema de Hahn-Banach

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p: X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Teorema de Hahn–Banach - Versión analítica. Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio propio de X y g es un funcional lineal en M dominado por p, es decir, verificando

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \quad (m \in M),$$

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Teorema de Hahn–Banach - Versión analítica. Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio propio de X y g es un funcional lineal en M dominado por p, es decir, verificando

$$\mathrm{Re}\, g(m) \leqslant p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe un funcional lineal f en X cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\mathrm{Re}\, f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Teorema de Hahn–Banach - Versión analítica. Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio propio de X y g es un funcional lineal en M dominado por p, es decir, verificando

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe un funcional lineal f en X cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Teorema de Hahn–Banach - Versión analítica. Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio propio de X y g es un funcional lineal en M dominado por p, es decir, verificando

$$\mathrm{Re}\, g(m) \leqslant p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe un funcional lineal f en X cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\mathrm{Re}\, f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.

Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+ = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^- = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$, Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H=\{x\in X : f(x)=\alpha\}$, donde $f\in X^{\sharp}$, $f\neq 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^{+}=\{x\in X : f(x)\geqslant\alpha\}$ y $H^{-}=\{x\in X : f(x)\leqslant\alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A,B\subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+ = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^- = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A, B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos.

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+ = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^- = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A, B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos.

Para que dos conjuntos A y B no vacíos y convexos puedan separarse es necesario que exista un funcional lineal $f \neq 0$ en X que verifique

$$f(a) \leqslant f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

o, lo que es igual

$$\sup\{f(a) : a \in A\} \leqslant \text{ínf}\{f(b) : b \in B\}$$

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+ = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^- = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A, B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos.

Para que dos conjuntos A y B no vacíos y convexos puedan separarse es necesario que exista un funcional lineal $f \neq 0$ en X que verifique

$$f(a) \leqslant f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

o, lo que es igual

$$\sup\{f(a) : a \in A\} \leqslant \inf\{f(b) : b \in B\}$$

Recíprocamente, cuando esto ocurre y α es cualquier número real tal que $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$ para todos $a \in A$ y $b \in B$, entonces el hiperplano afín de ecuación $f(x) = \alpha$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro.

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H=\{x \in X : f(x)=\alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+=\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^-=\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A,B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos.

Para que dos conjuntos A y B no vacíos y convexos puedan separarse es necesario que exista un funcional lineal $f \neq 0$ en X que verifique

$$f(a) \leqslant f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

o, lo que es igual

$$\sup\{f(a) : a \in A\} \leqslant \inf\{f(b) : b \in B\}$$

Recíprocamente, cuando esto ocurre y α es cualquier número real tal que $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$ para todos $a \in A$ y $b \in B$, entonces el hiperplano afín de ecuación $f(x)=\alpha$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro.Se dice también que **el funcional** f **separa los conjuntos** A y B.

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^+ = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^- = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$,cualquier par de conjuntos no vacíos $A, B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que *están separados por el hiperplano* H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B.Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos.

Para que dos conjuntos A y B no vacíos y convexos puedan separarse es necesario que exista un funcional lineal $f \neq 0$ en X que verifique

$$f(a) \leqslant f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

o, lo que es igual

$$\sup\{f(a) : a \in A\} \leqslant \text{ínf}\{f(b) : b \in B\}$$

Recíprocamente, cuando esto ocurre y α es cualquier número real tal que $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$ para todos $a \in A$ y $b \in B$, entonces el hiperplano afín de ecuación $f(x) = \alpha$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro.Se dice también que **el funcional** f **separa los conjuntos** A y B.Observa que si f separa A y B cualquier funcional de la forma ρf con $\rho \in \mathbb{R}$ también separa A y B.

La separación de conjuntos convexos puede plantearse también en el caso en que X sea un espacio vectorial complejo sin más que considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$, La separación de conjuntos convexos puede plantearse también en el caso en que X sea un espacio vectorial complejo sin más que considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$,pues los convexos en ambos espacios son los mismos y si existe un hiperplano en $X_{\mathbb{R}}$ que los separa, puesto que los funcionales lineales en $X_{\mathbb{R}}$ son las partes reales de los funcionales lineales en X, tendremos un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

La separación de conjuntos convexos puede plantearse también en el caso en que X sea un espacio vectorial complejo sin más que considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$,pues los convexos en ambos espacios son los mismos y si existe un hiperplano en $X_{\mathbb{R}}$ que los separa, puesto que los funcionales lineales en $X_{\mathbb{R}}$ son las partes reales de los funcionales lineales en X, tendremos un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando que

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.Por tanto, *el problema de la separación de convexos se reduce siempre al caso real*. No obstante, enunciaremos los resultados que siguen para espacios vectoriales reales o complejos, sin especificar, con la precaución de considerar siempre las partes reales de los funcionales lineales para escribir las desigualdades en las que intervienen, precaución innecesaria, obviamente, si el espacio es real.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice que es **absorbente** si para todo $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Equivalentemente, $X = \mathbb{R}^+ A$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice que es **absorbente** si para todo $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Equivalentemente, $X = \mathbb{R}^{+} A$.Es evidente que un conjunto absorbente debe contener a 0 y si, además, es convexo, entonces para todo $x \in X$, también ha de contener un segmento de la forma $[0, t_x x]$ con $t_x > 0$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice que es **absorbente** si para todo $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Equivalentemente, $X = \mathbb{R}^+ A$.Es evidente que un conjunto absorbente debe contener a 0 y si, además, es convexo, entonces para todo $x \in X$, también ha de contener un segmento de la forma $[0, t_x x]$ con $t_x > 0$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y C un conjunto no vacío, convexo y absorbente. Entonces se verifica que el **funcional de Minkowski** de C, es decir la aplicación $\mu_C : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\} = \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in C\} \qquad (x \in X)$$

es un funcional sublineal.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

d) A y B pueden separarse si, y sólo si, $B - A$ y $\{0\}$ pueden separarse.

Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice que es **absorbente** si para todo $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Equivalentemente, $X = \mathbb{R}^+ A$.Es evidente que un conjunto absorbente debe contener a 0 y si, además, es convexo, entonces para todo $x \in X$, también ha de contener un segmento de la forma $[0, t_x x]$ con $t_x > 0$.

Proposición. Sea X un espacio vectorial y C un conjunto no vacío, convexo y absorbente. Entonces se verifica que el **funcional de Minkowski** de C, es decir la aplicación $\mu_C : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu_C(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x/\lambda \in C\} \qquad (x \in X)$$

es un funcional sublineal.Además se verifica que

$$\{x \in X : \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : \mu_C(x) \leqslant 1\}$$

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \quad (a \in A, b \in B).$$

Teorema de extensión equinórmica Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \quad (a \in A, b \in B).$$

Teorema de extensión equinórmica Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Un funcional como f en el teorema anterior se dice que es una **extensión Hahn-Banach** o una **extensión equinórmica** de g a X.

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \quad (a \in A, b \in B).$$

Teorema de extensión equinórmica Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Un funcional como f en el teorema anterior se dice que es una **extensión Hahn-Banach** o una **extensión equinórmica** de g a X.

Corolario. Si X es un espacio normado, para cada $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. En consecuencia, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\} \quad (x \in X). \tag{1}$$

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach. Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad (a \in A, b \in B).$$

Teorema de extensión equinórmica Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Un funcional como f en el teorema anterior se dice que es una **extensión Hahn-Banach** o una **extensión equinórmica** de g a X.

Corolario. Si X es un espacio normado, para cada $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. En consecuencia, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\} \quad (x \in X). \tag{1}$$

Obtenemos, como consecuencia de este resultado, que X^* **separa los puntos de** X, esto es si $x \in X$ y $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$, entonces $x = 0$; equivalentemente, si $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposición. Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, y sea $z \in X \setminus M$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(z) = \mathrm{dist}(z, M)$ y $M \subset \ker(f)$.

Proposición. Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, y sea $z \in X \setminus M$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(z) = \mathrm{dist}(z, M)$ y $M \subset \ker(f)$.

Corolario. Sea Y un subespacio de un espacio normado X y $z \in X$. Si todo funcional $f \in X^*$ que se anula en Y también se anula en z entonces $z \in \overline{Y}$. En particular, Y es denso en X si el único funcional del dual que se anula en Y es el funcional nulo.

Proposición. Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, y sea $z \in X \setminus M$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(z) = \mathrm{dist}(z, M)$ y $M \subset \ker(f)$.

Corolario. Sea Y un subespacio de un espacio normado X y $z \in X$. Si todo funcional $f \in X^*$ que se anula en Y también se anula en z entonces $z \in \overline{Y}$. En particular, Y es denso en X si el único funcional del dual que se anula en Y es el funcional nulo.

Dado un conjunto no vacío A de un espacio normado X definimos su **anulador**, que representaremos por $A^\perp$, como el conjunto de los funcionales del dual X^* que se anulan en A.

$$A^\perp = \{f \in X^* : f(a) = 0 \ \forall a \in A\}$$

Proposición. Sea M un subespacio de un espacio normado X, entonces se verifica que

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{M} = X \Longleftrightarrow M^\perp = \{0\}$$

Podemos mejorar un poco este resultado como sigue. Sea A un subconjunto de un espacio normado X y pongamos $M = \mathrm{Lin}(A)$. Es claro que $M^\perp = A^\perp$ y deducimos que

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{f \in A^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{\mathrm{Lin}}(A) = X \Longleftrightarrow A^\perp = \{0\} \tag{2}$$

Los resultados anteriores proporcionan herramientas para relacionar las propiedades de un espacio normado con las de su dual. Un ejemplo típico de esto es el siguiente resultado.

Podemos mejorar un poco este resultado como sigue. Sea A un subconjunto de un espacio normado X y pongamos $M = \mathrm{Lin}(A)$. Es claro que $M^\perp = A^\perp$ y deducimos que

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{f \in A^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{\mathrm{Lin}}(A) = X \Longleftrightarrow A^\perp = \{0\} \tag{2}$$

Los resultados anteriores proporcionan herramientas para relacionar las propiedades de un espacio normado con las de su dual. Un ejemplo típico de esto es el siguiente resultado.

Proposición. Sea X un espacio normado y supongamos que X^* es separable, entonces también X es separable.

Podemos mejorar un poco este resultado como sigue. Sea A un subconjunto de un espacio normado X y pongamos $M = \mathrm{Lin}(A)$. Es claro que $M^\perp = A^\perp$ y deducimos que

$$\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \bigcap_{f \in A^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{\mathrm{Lin}}(A) = X \Longleftrightarrow A^\perp = \{0\} \tag{2}$$

Los resultados anteriores proporcionan herramientas para relacionar las propiedades de un espacio normado con las de su dual. Un ejemplo típico de esto es el siguiente resultado.

Proposición. Sea X un espacio normado y supongamos que X^* es separable, entonces también X es separable.

Proposición. Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado está complementado.

Proposición. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x \in A$, $y \in \operatorname{int}(A)$, se tiene que

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in]0,1]\} \subset \operatorname{int}(A).$$

Proposición. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x \in A$, $y \in \mathrm{int}(A)$, se tiene que

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in]0,1]\} \subset \mathrm{int}(A).$$

En consecuencia, $\mathrm{int}(A)$ es convexo y $\overline{A} = \overline{\mathrm{int}(A)}$.

Proposición. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x \in A$, $y \in \mathrm{int}(A)$, se tiene que

$$]x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in]0, 1]\} \subset \mathrm{int}(A).$$

En consecuencia, $\mathrm{int}(A)$ es convexo y $\overline{A} = \overline{\mathrm{int}(A)}$.

Teorema de separación de convexos en espacios normados. Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos y convexos tales que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^*$, que puede suponerse de norma igual a uno, y $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando que

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

De hecho, se tiene que $\mathrm{Re} f(a) < \alpha$ para todo $a \in \mathrm{int}(A)$.

Proposición. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x \in A$, $y \in \mathrm{int}(A)$, se tiene que

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in]0,1]\} \subset \mathrm{int}(A).$$

En consecuencia, $\mathrm{int}(A)$ es convexo y $\overline{A} = \overline{\mathrm{int}(A)}$.

Teorema de separación de convexos en espacios normados. Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos y convexos tales que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^*$, que puede suponerse de norma igual a uno, y $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando que

$$\mathrm{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re} f(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

De hecho, se tiene que $\mathrm{Re} f(a) < \alpha$ para todo $a \in \mathrm{int}(A)$.

Si A es cerrado con interior no vacío y $B = \{x_0\}$, donde $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$, podemos aplicar el resultado anterior para obtener $f \in X^*$ verificando que

$$\mathrm{Re} f(x) \leqslant \mathrm{Re} f(x_0) \quad \forall x \in A \Longleftrightarrow \max \mathrm{Re} f(A) = \mathrm{Re} f(x_0)$$

Proposición. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x \in A$, $y \in \operatorname{int}(A)$, se tiene que

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in]0,1]\} \subset \operatorname{int}(A).$$

En consecuencia, $\operatorname{int}(A)$ es convexo y $\overline{A} = \overline{\operatorname{int}(A)}$.

Teorema de separación de convexos en espacios normados. Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos y convexos tales que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^*$, que puede suponerse de norma igual a uno, y $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

De hecho, se tiene que $\operatorname{Re} f(a) < \alpha$ para todo $a \in \operatorname{int}(A)$.

Si A es cerrado con interior no vacío y $B = \{x_0\}$, donde $x_0 \in \operatorname{Fr}(A)$, podemos aplicar el resultado anterior para obtener $f \in X^*$ verificando que

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall x \in A \Longleftrightarrow \operatorname{máx} \operatorname{Re} f(A) = \operatorname{Re} f(x_0)$$

En tal caso, el hiperplano afín real $H = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(x_0)\}$, pasa por el punto frontera de A, x_0, y deja el conjunto A a un lado. Suele expresarse esto diciendo que f es un **funcional de soporte** del conjunto A en x_0, o que dicho hiperplano es un **hiperplano de soporte** de A en x_0.

Corolario. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $\max\{\mathrm{Re} f(x) : x \in A\} = \mathrm{Re} f(x_0)$.

Corolario. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $\text{máx}\{\text{Re} f(x) : x \in A\} = \text{Re} f(x_0)$.

Corolario. Sea X un espacio normado, $A \subset X$ un conjunto no vacío, convexo y abierto, V una variedad afín tal que $A \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $V \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$.

Corolario. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $\max\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\} = \operatorname{Re} f(x_0)$.

Corolario. Sea X un espacio normado, $A \subset X$ un conjunto no vacío, convexo y abierto, V una variedad afín tal que $A \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $V \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$.

Teorema de separación fuerte en espacios normados. Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $\operatorname{dist}(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \rho \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B). \tag{3}$$

Corolario. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $\max\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\} = \operatorname{Re} f(x_0)$.

Corolario. Sea X un espacio normado, $A \subset X$ un conjunto no vacío, convexo y abierto, V una variedad afín tal que $A \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $V \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$.

Teorema de separación fuerte en espacios normados. Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $\operatorname{dist}(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \rho \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B). \tag{3}$$

Se dice que el funcional f *separa fuertemente* los conjuntos A y B.

Corolario. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $\max\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\} = \operatorname{Re} f(x_0)$.

Corolario. Sea X un espacio normado, $A \subset X$ un conjunto no vacío, convexo y abierto, V una variedad afín tal que $A \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $V \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$.

Teorema de separación fuerte en espacios normados. Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $\operatorname{dist}(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \rho \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B). \tag{3}$$

Se dice que el funcional f *separa fuertemente* los conjuntos A y B.

En particular, si A es un subconjunto convexo, no vacío y cerrado de X y $x_0 \notin A$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \operatorname{dist}(x_0, A) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$$

luego $\sup \operatorname{Re} f(A) < \operatorname{Re} f(x_0)$.

Recuerda que si $A \subset X$ es un conjunto no vacío en un espacio normado X, la **envolvente convexo cerrada** de A se representa por $\overline{\mathrm{co}}(A)$ y se define como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A. Puesto que el cierre de un convexo es un convexo, se verifica que $\overline{\mathrm{co}}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.

Recuerda que si $A \subset X$ es un conjunto no vacío en un espacio normado X, la **envolvente convexo cerrada** de A se representa por $\overline{\mathrm{co}}(A)$ y se define como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A. Puesto que el cierre de un convexo es un convexo, se verifica que $\overline{\mathrm{co}}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.

Corolario. Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío en un espacio normado. Entonces
$$\overline{\mathrm{co}}(A) = \bigcap_{f \in X^*} \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup \operatorname{Re} f(A)\} \tag{4}$$

Proposición. Sean A y B conjuntos convexos no vacíos y disjuntos en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe un hiperplano que los separa, es decir, existen números $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$ tales que

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k a(k) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b(k) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$